3.1 KMITÁNÍ MECHANICKÉHO OSCILÁTORU

Kmitání mechanického oscilátoru (např. kmitání tělesa na pružině) charakterizuje *perioda* T, *frekvence* f a *úhlová frekvence* ω. Mezi těmito veličinami platí vztahy

$$f = \frac{1}{T}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Nejjednodušší kmitavý pohyb je *harmonický pohyb kmitavý*. *Okamžitá výchylka*, *okamžitá rychlost* a *okamžité zrychlení* harmonického kmitavého pohybu je určeno vztahy

$$\begin{aligned} y &= y_m \sin \omega t, \\ v &= v_m \cos \omega t = \omega y_m \cos \omega t, \\ a &= -a_m \sin \omega t = -\omega^2 y_m \sin \omega t = -\omega^2 y, \end{aligned}$$

kde ωt je *fáze kmitání* a veličiny y_m, $v_m = \omega y_m$ a $a_m = -\omega^2 y_m$ jsou *amplitudy výchylky*, *rychlosti* a *zrychlení*.

Je-li v čase $t = 0$ počáteční fáze φ_0 různá od nuly, platí pro okamžitou výchylku, rychlost a zrychlení vztahy

$$\begin{aligned} y &= y_m \sin(\omega t + \varphi_0), \\ v &= v_m \cos(\omega t + \varphi_0), \\ a &= -a_m \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y. \end{aligned}$$

Fáze kmitání je tomto případě $\omega t + \varphi_0$.

Harmonický pohyb mechanického oscilátoru způsobuje síla, jejíž velikost je přímo úměrná okamžité výchylce a má opačný směr

$$F = -ky.$$

Kmitá-li těleso na pružině, pak konstanta k je *tuhost pružiny*.

Pro úhlovou frekvenci ω, periodu T a frekvenci f harmonického oscilátoru platí vztahy

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

kde m je hmotnost kmitajícího tělesa.

Pro periodu matematického kyvadla platí vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

kde l je délka matematického kyvadla a g tíhové zrychlení.

Při harmonickém kmitavém pohybu se periodicky mění potenciální energie oscilátoru $E_p = \frac{1}{2}ky^2$ v kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ a naopak. Pro celkovou energii E mechanického oscilátoru platí

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ky_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2.$$

Podle zákona zachování energie je celková energie mechanického oscilátoru vykonávajícího harmonický kmitavý pohyb konstantní.

ÚLOHY

KINEMATIKA HARMONICKÉHO KMITAVÉHO POHYBU

Úloha 153

Amplituda výchylky harmonického kmitavého pohybu závaží na pružině je 0,02 m a doba kmitu 1 s. Řešte tyto úkoly:

a) Napište rovnici pro okamžitou výchylku.
b) Jak dlouho trvá pohyb závaží z rovnovážné polohy do polohy krajní?
c) Za jakou dobu vykoná závaží první polovinu této dráhy?
d) Za jakou dobu vykoná druhou polovinu uvažované dráhy?

Řešení

$y_m = 0{,}02$ m, $T = 1$ s; $t_1 = ?$, $t_2 = ?$, $t_3 = ?$

a) Rovnice pro okamžitou výchylku má tvar

$$y = y_m \sin \omega t = y_m \sin \frac{2\pi}{T}t.$$

Dosadíme-li $y_m = 0{,}02$ m a $T = 1$ s, dostaneme

$$\{y\} = 0{,}02 \sin 2\pi\{t\},$$

kde $\{y\}$ a $\{t\}$ jsou číselné hodnoty okamžité výchylky a času.

b) Označme dobu, za kterou se závaží dostane z rovnovážné polohy do krajní, t_1; jeho výchylka za tuto dobu je $y_1 = y_m = 0{,}02$ m. Platí tedy

$$0{,}02 = 0{,}02 \sin 2\pi\{t_1\}$$
$$\sin 2\pi\{t_1\} = 1$$
$$2\pi\{t_1\} = \frac{1}{2}\pi$$
$$t_1 = \frac{1}{4}\ \mathrm{s}$$

Závaží se dostane z rovnovážné polohy do krajní za $\frac{1}{4}$ s. Tento výsledek je však samozřejmý, neboť perioda kmitavého pohybu je 1 s a závaží za dobu t_1 vykoná $\frac{1}{4}$ kmitu.

c) Označme dobu, za kterou závaží vykoná první polovinu dráhy z rovnovážné polohy do krajní, t_2; jeho výchylka za tuto dobu je $y_2 = y_m/2 = 0{,}01$ m. Po dosazení do rovnice pro výchylku harmonického kmitavého pohybu dostáváme:

$$0{,}01 = 0{,}02 \sin 2\pi\{t_2\}$$
$$\sin 2\pi\{t_2\} = \frac{1}{2}$$
$$2\pi\{t_2\} = \frac{1}{6}\pi$$
$$t_2 = \frac{1}{12}\ \mathrm{s}$$

Závaží vykoná první polovinu dráhy z rovnovážné polohy do krajní za $\frac{1}{12}$ s.

d) Druhou polovinu své dráhy z rovnovážné polohy do krajní vykoná závaží za dobu

$$t_3 = t_1 - t_2 = \frac{1}{4}\ \mathrm{s} - \frac{1}{12}\ \mathrm{s} = \frac{1}{6}\ \mathrm{s}.$$

Úloha 154

Hmotný bod koná harmonický kmitavý pohyb s amplitudou výchylky 10 cm a s periodou 2 s. Určete výchylku, rychlost a zrychlení bodu v čase 0,2 s od začátku pohybu. Počáteční fáze kmitavého pohybu je rovna nule.

Řešení

$y_m = 0{,}1$ m, $T = 2$ s, $\varphi_0 = 0$, $t = 0{,}2$ s; $y = ?$, $v = ?$, $a = ?$

Pro okamžitou výchylku harmonického kmitavého pohybu s nulovou počáteční fází platí vztah

$$y = y_m \sin \omega t = y_m \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Číselně $y = 0{,}1 \sin \frac{2\pi}{2} \cdot 0{,}2\ \mathrm{m} \doteq 0{,}059\ \mathrm{m}.$

Okamžitou rychlost harmonického kmitavého pohybu lze vyjádřit vztahem

$$v = \omega y_m \cos \omega t = \frac{2\pi}{T} y_m \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

Číselně $v = \frac{2\pi}{2} \cdot 0{,}1 \cos \frac{2\pi}{2} \cdot 0{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 0{,}25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$

Pro okamžité zrychlení harmonického kmitavého pohybu platí

$$a = -\omega^2 y_m \sin \omega t = -\frac{4\pi^2}{T^2} y_m \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Číselně $|a| = \frac{4\pi^2}{2^2} \cdot 0{,}1 \sin \frac{2\pi}{2} \cdot 0{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \doteq 0{,}58\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$

Uvažovaný bod kmitající harmonickým kmitavým pohybem má v čase 0,2 s výchylku 0,059 m, rychlost 0,25 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a zrychlení 0,58 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Poznámky

1. Pro výpočet zrychlení harmonického kmitavého pohybu lze využít také vztah
$$a = -\omega^2 y = -\frac{4\pi^2}{T^2} y.$$
Číselně $|a| = \frac{4\pi^2}{2^2} \cdot 0{,}059\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \doteq 0{,}58\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$

2. Při výpočtu hodnot goniometrických funkcí užitím kalkulačky je třeba kalkulačku nejprve nastavit na počítání s úhly měřenými v míře obloukové (tj. v radiánech).

Úloha 155

Hmotný bod vykonává harmonický kmitavý pohyb. Pro jeho výchylku platí

$$\{y\} = 0{,}2 \sin\left(\frac{1}{3}\pi\{t\} + \frac{1}{4}\pi\right).$$

Určete amplitudu výchylky, periodu a počáteční fázi kmitavého pohybu. Všechny veličiny jsou uvedeny v hlavních jednotkách soustavy SI.

Řešení

Porovnáním s rovnicí pro výchylku harmonického kmitavého pohybu

$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

dostáváme $y_m = 0{,}2$ m, $\omega = \frac{1}{3}\pi\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ a $\varphi_0 = \frac{1}{4}\pi$ rad. Periodu T vypočteme ze vztahu $\omega = 2\pi/T$, odkud $T = 2\pi/\omega$ a po dosazení za ω

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}\ \mathrm{s} = 6\ \mathrm{s}.$$

Hmotný bod kmitá s amplitudou výchylky 0,2 m a s periodou 6 s. Počáteční fáze kmitavého pohybu je $\frac{1}{4}\pi$ rad.

Úloha 156

Určete fázi hmotného bodu vykonávajícího harmonický kmitavý pohyb s periodou 0,5 s, jestliže od začátku kmitání uplynula doba 0,05 s. Počáteční fáze kmitavého pohybu je rovna nule.

Řešení

$T = 0{,}5$ s, $t = 0{,}05$ s; $\varphi = ?$

Fázi hmotného bodu kmitajícího harmonickým kmitavým pohybem vypočteme ze vztahu

$$\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{T}t.$$

$$\text{Číselně}\quad \varphi = \frac{2\pi}{0{,}5} \cdot 0{,}05\ \mathrm{rad} \doteq 0{,}63\ \mathrm{rad}.$$

Fáze kmitavého pohybu po uplynutí doby 0,05 s je 0,63 rad.

Úloha 157

Určete frekvenci harmonického kmitavého pohybu hmotného bodu, jestliže se za dobu 0,1 s po průchodu rovnovážnou polohou jeho výchylka rovnala polovině amplitudy výchylky. Počáteční fáze kmitavého pohybu se rovná nule.

Řešení

$t = 0{,}1$ s, $y = \frac{1}{2}y_m$; $f = ?$

Za dobu $t = 0{,}1$ s je výchylka hmotného bodu $y = \frac{1}{2}y_m$. Po dosazení do rovnice $y = y_m \sin 2\pi f t$ proto dostaneme:

$$\frac{1}{2}y_m = y_m \sin 2\pi f t$$

$$\sin 2\pi f t = \frac{1}{2}$$

$$2\pi f t = \frac{\pi}{6}$$

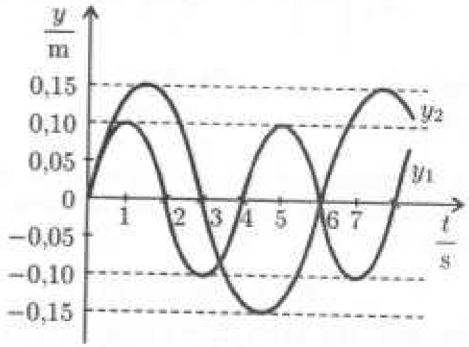
$$f = \frac{1}{12t}$$

$$\text{Číselně}\quad f = \frac{1}{12 \cdot 0{,}1}\ \mathrm{s^{-1}} \doteq 0{,}83\ \mathrm{s^{-1}}.$$

Hmotný bod kmitá s frekvencí 0,83 Hz.

Úloha 158

Na obr. 27 je časový diagram harmonického kmitavého pohybu dvou závaží zavěšených na dvou pružinách. Napište rovnice pro výchylky obou harmonických kmitavých pohybů.



Obr. 27

Řešení

Rovnice pro výchylku harmonického kmitavého pohybu s nulovou počáteční fází má tvar

$$y = y_m \sin \omega t.$$

Z grafů na obr. 27 vyplývá $T_1 = 4$ s, $y_{m1} = 0{,}1$ m, $T_2 = 6$ s, $y_{m2} = 0{,}15$ m. Pro úhlové frekvence obou harmonických kmitavých pohybů platí

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{4}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}},$$

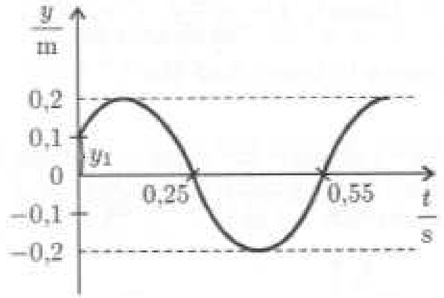
$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{6}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} = \frac{\pi}{3}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}.$$

Po dosazení do rovnice pro výchylku harmonického kmitavého pohybu dostáváme

$$\{y_1\} = 0{,}1 \sin \frac{\pi}{2}\{t\}, \quad \{y_2\} = 0{,}15 \sin \frac{\pi}{3}\{t\}.$$

Úloha 159

Napište rovnici pro okamžitou výchylku harmonického kmitavého pohybu hmotného bodu, jehož časový diagram je na obr. 28.



Obr. 28

Řešení

Podle časového diagramu je v čase $t = 0$ počáteční výchylka y_1 (a v důsledku toho i počáteční fáze φ_0) různá od nuly. Pro okamžitou výchylku proto platí vztah

$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (a)$$

Z časového diagramu dále vyplývá pro amplitudu výchylky $y_m = 0{,}2$ m a pro periodu $T/2 = 0{,}55\ \mathrm{s} - 0{,}25\ \mathrm{s} = 0{,}3$ s, tedy $T = 0{,}6$ s. Úhlová frekvence je pak $\omega = 2\pi/T = (2\pi/0{,}6)\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}} = \frac{10}{3}\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Poněvadž podle grafu je v čase $t = 0$, $y = y_1 = 0{,}1$ m, dostaneme po dosazení do vztahu (a)

$$0{,}1 = 0{,}2 \sin\varphi_0 \quad \text{a odtud} \quad \sin\varphi_0 = \frac{0{,}1}{0{,}2} = \frac{1}{2}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6}.$$

Po dosazení za y_m, ω a φ_0 do vztahu (a) dostaneme

$$y = 0{,}2 \sin\left(\frac{10}{3}\pi\{t\} + \frac{\pi}{6}\right)\ \mathrm{m}.$$

VZTAH PRO PERIODU A FREKVENCI HARMONICKÉHO KMITAVÉHO POHYBU

Úloha 160

Závaží, které viselo v klidu na pružině, ji prodloužilo o 4 cm. Jestliže se z této polohy vychýlilo vnější silou směrem dolů, začalo vykonávat harmonický kmitavý pohyb. Určete jeho periodu. Tíhové zrychlení je 10 m · s^{-2}.

Řešení

$\Delta l = 4 \cdot 10^{-2}$ m, $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $T = ?$

Perioda harmonického kmitavého pohybu závaží připevněného k pružině je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

kde m je hmotnost závaží a k tuhost pružiny. Síla působící na pružinu je přímo úměrná jejímu prodloužení. Poněvadž závaží, které viselo v klidu na pružině, ji prodloužilo o Δl, platí

$$mg = k\Delta l.$$

Vyjádříme-li z této rovnice podíl $m/k = \Delta l/g$ a dosadíme-li ho do vztahu pro periodu T, dostaneme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}.$$

$$\text{Číselně} \quad T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-2}}{10}}\ \mathrm{s} \doteq 0{,}4\ \mathrm{s}.$$

Závaží po uvolnění začne vykonávat harmonický kmitavý pohyb s periodou 0,4 s.

Úloha 161

Jak se změní perioda harmonického kmitavého pohybu, jestliže k pružině místo měděné kuličky připevníme hliníkovou kuličku o témže průměru? Hustota mědi je 8 930 kg · m^{-3}, hustota hliníku 2 700 kg · m^{-3}.

Řešení

$\varrho_1 = 8\,930\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\varrho_2 = 2\,700\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$; $T_1/T_2 = ?$

Pro periody měděné a hliníkové kuličky stejného objemu, které kmitají na stejných pružinách, platí

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\varrho_1 V}{k}}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\varrho_2 V}{k}},$$

kde k je tuhost pružiny. Dělením levých a pravých stran obou rovnic dostaneme

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}}.$$

$$\text{Číselně} \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{8\,930}{2\,700}} \doteq 1{,}8.$$

Měděná kulička kmitá s 1,8krát větší periodou než hliníková.

Úloha 162

Jak se změní doba kmitu matematického kyvadla, jestliže zkrátíme jeho délku o 25 % původní délky?

Řešení

$l_2 = l_1 - \frac{1}{4}l_1 = \frac{3}{4}l_1$; $T_1/T_2 = ?$

Pro periodu matematického kyvadla před zkrácením a po zkrácení jeho délky platí

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{4}l_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{3l_1}{4g}}.$$

Pro poměr period T_1/T_2 odtud dostáváme

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{3l_1}{4g}}} = \sqrt{\frac{\frac{l_1}{g}}{\frac{3l_1}{4g}}} = \sqrt{\frac{l_1}{g}\,\frac{4g}{3l_1}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Po zkrácení délky matematického kyvadla o 25 % původní délky platí pro poměr jeho period $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, tj. $T_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}T_1 \doteq 0{,}87T_1$.

Úloha 163

Jak se změní perioda matematického kyvadla, jestliže ho přeneseme ze Země na Měsíc? Hmotnost Měsíce je 81krát menší než hmotnost Země, poloměr Země je 3,7krát větší než poloměr Měsíce.

Řešení

$M_Z/M_M = 81$, $R_Z/R_M = 3{,}7$; $T_M/T_Z = ?$

Ze vztahů pro periody matematického kyvadla na Zemi a na Měsíci vyplývá

$$\frac{T_M}{T_Z} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g_M}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g_Z}}} = \sqrt{\frac{g_Z}{g_M}}.$$

Poměr g_Z/g_M tíhových zrychlení na Zemi a na Měsíci určíme pomocí gravitačního zákona a druhého pohybového zákona. Pro tíhové síly, kterými působí Země a Měsíc na těleso o hmotnosti m, platí

$$mg_Z = \varkappa\frac{mM_Z}{R_Z^2}, \qquad mg_M = \varkappa\frac{mM_M}{R_M^2}.$$

Dělením pravých a levých stran obou rovnic dostáváme

$$\frac{g_Z}{g_M} = \frac{M_Z}{R_Z^2}\,\frac{R_M^2}{M_M} = \frac{M_Z}{M_M}\left(\frac{R_M}{R_Z}\right)^2$$

a po dosazení do vztahu pro poměr period matematického kyvadla

$$\frac{T_M}{T_Z} = \sqrt{\frac{M_Z}{M_M}\left(\frac{R_M}{R_Z}\right)^2} = \frac{R_M}{R_Z}\sqrt{\frac{M_Z}{M_M}}.$$

$$\text{Číselně} \quad \frac{T_M}{T_Z} = \frac{1}{3{,}7}\cdot\sqrt{81} \doteq 2{,}4.$$

Perioda matematického kyvadla na Měsíci je 2,4krát větší než perioda téhož kyvadla na Zemi.

DYNAMIKA HARMONICKÉHO KMITAVÉHO POHYBU

Úloha 164

Závaží o hmotnosti 0,3 kg zavěšené na pružině vykonává harmonický kmitavý pohyb daný rovnicí

$$\{y\} = 0{,}2\sin\left(\frac{3\pi}{5}\{t\} + \frac{\pi}{3}\right).$$

Určete maximální sílu, která působí během pohybu na závaží.

Řešení

Pro sílu způsobující harmonický kmitavý pohyb platí

$$F = ma = -m\omega^2 y.$$

Tato síla je největší, jestliže výchylka y se rovná amplitudě výchylky y_m. Pro velikost maximální síly proto platí

$$|F_m| = m\omega^2 y_m.$$

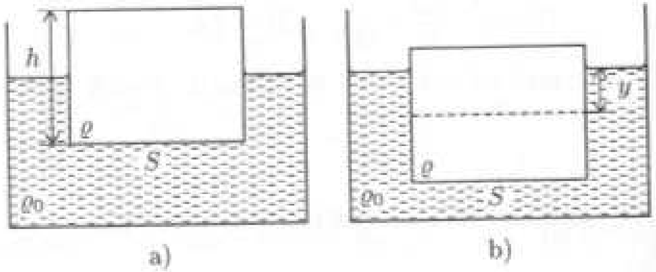
Z porovnání rovnic $y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ a $\{y\} = 0{,}2 \sin\left(\frac{3\pi}{5}\{t\} + \frac{\pi}{3}\right)$ vyplývá $y_m = 0{,}2$ m a $\omega = \frac{3\pi}{5}$ rad $\cdot$ s^{-1}. Po dosazení těchto veličin do vztahu pro velikost maximální síly $|F_m|$ pak dostáváme

$$|F_m| = 0{,}3 \left(\frac{3\pi}{5}\right)^2 0{,}2 \text{ N} \doteq 0{,}21 \text{ N}.$$

Na závaží kmitající na pružině působí maximální síla 0,21 N.

Úloha 165

Hranol z dubového dřeva o výšce 10 cm plave na hladině vody (obr. 29a). Hranol poněkud zatlačíme do vody a pustíme (obr. 29b). Určete periodu kmitání hranolu. Hustota dubového dřeva je 900 kg $\cdot$ m^{-3}, hustota vody je 1 000 kg $\cdot$ m^{-3} a tíhové zrychlení 9,81 m $\cdot$ s^{-2}. Výšku hladiny v nádobě považujeme za stálou.



Obr. 29

Řešení

$h = 0{,}1$ m, $\varrho_0 = 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}, $\varrho = 900$ kg $\cdot$ m^{-3}, $g = 9{,}81$ m $\cdot$ s^{-2}; $T = ?$

V rovnovážné poloze (obr. 29a) působí na hranol dvě stejně velké síly opačného směru, tíhová síla a vztlaková síla. Jestliže hranol z původní rovnovážné polohy zatlačíme do vody do hloubky y (obr. 29b), poruší se rovnováha a vznikne dodatečná vztlaková síla směřující vzhůru do rovnovážné polohy. Velikost této síly je podle Archimedova zákona

$$F = -\varrho_0 g S y, \qquad \text{(a)}$$

kde ϱ_0 je hustota vody a S obsah podstavy hranolu. Z tohoto vztahu je patrné, že síla F, která způsobuje po uvolnění hranolu jeho pohyb, je přímo úměrná výchylce y, má však opačný směr; proto po uvolnění začne hranol vykonávat harmonický kmitavý pohyb. Perioda tohoto pohybu je určena vztahem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad \text{(b)}$$

kde $m = Sh\varrho$ je hmotnost hranolu (h je jeho výška). Konstantu k dostaneme porovnáním rovnice $F = -ky$ s rovnicí (a) pro sílu F; odtud $k = \varrho_0 g S$. Po dosazení za m a k do vztahu (b) pro periodu harmonického kmitavého pohybu dostáváme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Sh\varrho}{\varrho_0 g S}} = 2\pi\sqrt{\frac{h\varrho}{\varrho_0 g}}.$$

$$\text{Číselně} \quad T = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 900}{10^3 \cdot 9{,}81}} \text{ s} \doteq 0{,}6 \text{ s}.$$

Hranol bude vykonávat harmonický kmitavý pohyb s periodou 0,6 s.

Úloha 166

Vypočtěte celkovou energii tělesa vykonávajícího harmonický kmitavý pohyb, je-li jeho hmotnost 200 g, amplituda výchylky 2 cm a frekvence 5 Hz.

Řešení

$m = 0{,}2$ kg, $y_m = 0{,}02$ m, $f = 5$ Hz; $E = ?$

Celkovou energii oscilátoru lze vyjádřit vztahem

$$E = E_p + E_k,$$

kde $E_p = \frac{1}{2}ky^2$ je okamžitá hodnota potenciální energie oscilátoru a $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ okamžitá hodnota jeho energie kinetické. Při dosažení amplitudy výchylky y_m je $E_p = \frac{1}{2}ky_m^2$ a $E_k = 0$. Celková energie oscilátoru je pak

$$E = E_p = \frac{1}{2}ky_m^2. \qquad \text{(a)}$$

Ze vztahu pro frekvenci mechanického oscilátoru $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$ dostáváme

$$k = 4\pi^2 f^2 m \tag{b}$$

a po dosazení (b) do (a)

$$E = \frac{1}{2} 4\pi^2 f^2 m y_m^2 = 2\pi^2 m f^2 y_m^2.$$

Číselně $E = 2 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}2 \cdot 5^2 \cdot 0{,}02^2\ \mathrm{J} \doteq 0{,}039\ \mathrm{J}$.

Celková energie tělesa vykonávajícího harmonický kmitavý pohyb je 0,039 J.

Poznámka

Uveďme ještě druhý způsob řešení této úlohy. Při průchodu tělesa rovnovážnou polohou je jeho potenciální energie rovna nule a podle vztahu $E = E_p + E_k$ se jeho celková energie v tomto bodě rovná jeho energii kinetické

$$E = E_k = \frac{1}{2} m v_m^2.$$

Po dosazení amplitudy rychlosti $v_m = \omega y_m$ do tohoto vztahu dostáváme

$$E = \frac{1}{2} m(\omega y_m)^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 y_m^2 = \frac{1}{2} m(2\pi f)^2 y_m^2 = 2\pi^2 m f^2 y_m^2,$$

což je ve shodě s předcházejícím výsledkem.

3.2 MECHANICKÉ VLNĚNÍ

Mechanické vlnění je děj, při němž se kmitání přenáší látkovým prostředím.

Při *postupném vlnění* kmitají všechny body se stejnou amplitudou výchylky, se stejnou frekvencí, ale různou, na čase závislou fází. Každý následující bod dosahuje stejné výchylky později než bod předcházející.

Při *stojatém vlnění* kmitají všechny body se stejnou, popř. opačnou fází, se stejnou frekvencí, ale s různou amplitudou výchylky, která závisí na poloze bodu. Místa s největší amplitudou výchylky jsou *kmitny*, body, které jsou v klidu, se nazývají *uzly*. Mechanické vlnění lze také rozdělit na *příčné* (hmotné body kmitají kolmo na směr, kterým vlnění postupuje) a *podélné* (hmotné body kmitají ve směru, kterým vlnění postupuje).

Postupné vlnění je charakterizováno *rychlostí šíření vlnění* v, *periodou* T, *frekvencí* f, *úhlovou frekvencí* ω a *vlnovou délkou* λ. Mezi těmito veličinami platí vztahy

$$f = \frac{1}{T}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad \lambda = vT = \frac{v}{f}.$$

Rovnici harmonické postupné vlny, která se šíří řadou hmotných bodů, lze vyjádřit vztahem

$$y = y_m \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

kde y je okamžitá výchylka hmotného bodu, který leží ve vzdálenosti x vpravo od počátku, v čase t. Přitom předpokládáme, že v počátku je harmonicky kmitající bodový zdroj vlnění a vzniklé vlnění není tlumené.

Interference vlnění je děj, při němž se v určitém bodě prostředí, kterým se šíří vlnění, skládají okamžité výchylky dvou a více vlnění. Interferencí dvou stejných vlnění vzniká výsledné vlnění, jehož amplituda je největší v místech, v nichž se vlnění setkávají se stejnou fází (interferenční maximum), a nejmenší (popř. nulová) je v místech, v nichž se vlnění setkávají s opačnou fází (interferenční minimum).

Mechanické vlnění v prostoru se šíří ve *vlnoplochách*. Vlnoplocha postupného vlnění je plocha, jejíž body kmitají se stejnou fází.

Pro šíření vlnění platí *Huygensův princip*, podle kterého každý bod vlnoplochy, do něhož dospělo vlnění v určitém okamžiku, můžeme považovat za zdroj elementárního vlnění, které se z něho šíří v elementárních vlnoplochách. Vlnoplocha v dalším časovém okamžiku je vnější obalová plocha všech elementárních vlnoploch.

Zvukové vlnění je mechanické vlnění o frekvenci přibližně 16 Hz až 16 kHz, které vnímáme sluchem. Zdrojem zvuku je chvění pružných těles.

Rychlost zvuku ve vzduchu závisí na teplotě t podle vztahu

$$v_t = (331{,}82 + 0{,}61\{t\})\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

V kapalinách a pevných látkách je rychlost zvuku větší než ve vzduchu.

ÚLOHY

POSTUPNÉ MECHANICKÉ VLNĚNÍ

Úloha 167

Jakou rychlostí se šíří vlna, jestliže má vlnovou délku 0,425 m a kmitočet 2,5 kHz?

Řešení

$\lambda = 0{,}425$ m, $f = 2{,}5\cdot 10^3$ Hz; $v = ?$

Pro vlnovou délku λ platí $\lambda = v/f$ a odtud

$$v = f\lambda = 2{,}5\cdot 10^3 \cdot 0{,}425\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 1{,}1\cdot 10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Vlna se šíří rychlostí o velikosti 1,1 $\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Úloha 168

Jaký je fázový rozdíl dvou bodů postupné vlny o frekvenci 2 Hz, která se šíří podél pryžové hadice rychlostí o velikosti 3 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$? Vzájemná vzdálenost bodů je 75 cm.

Řešení

$f = 2$ Hz, $v = 3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\Delta x = 0{,}75$ m; $\Delta\varphi = ?$

Pro výchylky obou bodů v postupné vlně šířící se podél hadice v kladném směru osy x platí

$$y_1 = y_m \sin\omega\left(t - \frac{x_1}{v}\right),\quad y_2 = y_m \sin\omega\left(t - \frac{x_2}{v}\right).$$

Fázový rozdíl obou bodů je

$$\Delta\varphi = \omega\left(t - \frac{x_1}{v}\right) - \omega\left(t - \frac{x_2}{v}\right) = \frac{\omega}{v}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi f\Delta x}{v}.$$

Číselně $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi\cdot 2\cdot 0{,}75}{3}$ rad $= \pi$ rad.

Fázový rozdíl obou kmitajících bodů je π rad.

Poznámka

Poněvadž fázový rozdíl obou kmitajících bodů je π, mají oba body stejně velké výchylky opačného směru.

Úloha 169

Jaká je amplituda výchylky, perioda, frekvence, vlnová délka a rychlost vlny vyjádřené rovnicí

$$\{y\} = 4\cdot 10^{-2}\sin 2\pi(8\{t\} - 5\{x\})?$$

Všechny veličiny jsou uvedeny v hlavních jednotkách soustavy SI.

Řešení

Porovnáním rovnice dané vlny s obecnou rovnicí vlnění

$$y = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

dostáváme

$$y_m = 4\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m},\ \frac{1}{T} = 8\ \mathrm{s^{-1}},\ T = \frac{1}{8}\ \mathrm{s},\ \frac{1}{\lambda} = 5\ \mathrm{m^{-1}},\ \lambda = \frac{1}{5}\ \mathrm{m} = 0{,}2\ \mathrm{m}.$$

Pro velikost rychlosti v platí

$$v = f\lambda = 8\cdot 0{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 1{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Daná vlna má amplitudu výchylky $4\cdot 10^{-2}$ m, periodu $\frac{1}{8}$ s, frekvenci 8 Hz, vlnovou délku 0,2 m a velikost rychlosti 1,6 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Úloha 170

Jakou rovnici má vlna, jejíž frekvence je 30 Hz a amplituda 2 cm, jestliže postupuje v kladném směru osy x rychlostí 3 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$?

Řešení

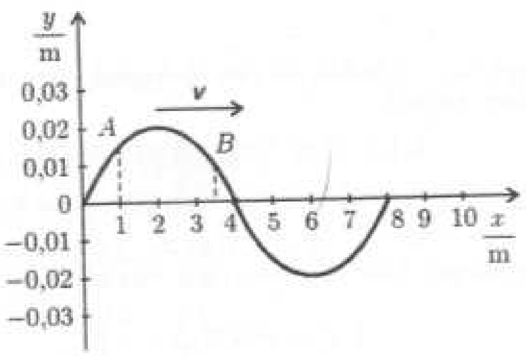
$f = 30$ Hz, $y_m = 0{,}02$ m, $v = 3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Protože $y_m = 0{,}02$ m, $T = 1/f = \frac{1}{30}$ s a $\lambda = vT = 3 \cdot \frac{1}{30}$ m $= 0{,}1$ m, lze rovnici postupného vlnění $y = y_m \sin 2\pi(t/T - x/\lambda)$ napsat ve tvaru

$$\{y\} = 0{,}02 \sin 2\pi\left(\frac{1}{\frac{1}{30}}\{t\} - \frac{\{x\}}{0{,}1}\right) = 0{,}02 \sin 2\pi(30\{t\} - 10\{x\}).$$

Úloha 171

Na obr. 30 je znázorněna v určitém časovém okamžiku příčná postupná sinusová vlna, která se šíří v kladném směru osy x rychlostí 20 m·s^{-1}. Určete její vlnovou délku a stanovte periodu, frekvenci a amplitudu výchylky bodů A a B. Napište rovnici uvažované postupné vlny.



Obr. 30

Řešení

Z obr. 30 vyplývá, že vlnová délka dané sinusové vlny je $\lambda = 8$ m. Oba body A a B vykonávají harmonický kmitavý pohyb se stejnou periodou, frekvencí a se stejnou amplitudou výchylky. Poněvadž $\lambda = vT$, pro periodu T odtud dostáváme

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{8}{20} \text{ s} = 0{,}4 \text{ s}.$$

Frekvence f je pak

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}4} \text{ s}^{-1} = 2{,}5 \text{ s}^{-1} = 2{,}5 \text{ Hz}.$$

Podle obr. 30 je amplituda výchylky obou bodů $y_m = 0{,}02$ m.

Rovnici dané postupné vlny můžeme psát ve tvaru

$$y = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

a odtud po dosazení za y_m, T a λ

$$\{y\} = 0{,}02 \sin 2\pi\left(\frac{\{t\}}{0{,}4} - \frac{\{x\}}{8}\right) = 0{,}02 \sin 2\pi(2{,}5\{t\} - 0{,}125\{x\}).$$

Vlna znázorněná na obr. 30 má vlnovou délku 8 m. Body A a B kmitají s periodou 0,4 s, s frekvencí 2,5 Hz a s amplitudou výchylky 0,02 m.

Úloha 172

Harmonická (sinusová) vlna se šíří od zdroje vlnění, který je umístěn v počátku souřadnicové soustavy v kladném směru osy x. Určete okamžitou výchylku hmotného bodu vzdáleného $x = \frac{1}{12}\lambda$ od zdroje vlnění v čase $t = \frac{1}{6}T$. Amplituda výchylky je 0,05 m.

Řešení

$y_m = 0{,}05$ m, $x = \frac{1}{12}\lambda$, $t = \frac{1}{6}T$; $y = ?$

Harmonickou vlnu můžeme popsat rovnicí

$$y = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Číselně
$$\{y\} = 0{,}05 \sin 2\pi\left(\frac{\frac{T}{6}}{T} - \frac{\frac{\lambda}{12}}{\lambda}\right) = 0{,}05 \sin 2\pi\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) =$$
$$= 0{,}05 \sin \frac{1}{6}\pi = 0{,}05 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}025$$
$$y = 0{,}025 \text{ m} = 2{,}5 \text{ cm}.$$

Hledaná okamžitá výchylka hmotného bodu je 2,5 cm.

Úloha 173

Zdroj vlnění koná netlumené harmonické kmity, které lze popsat rovnicí

$$\{y\} = 0{,}04 \sin 600\pi\{t\}.$$

Z tohoto zdroje se v kladném směru osy x šíří vlnění rychlostí o velikosti 300 m·s^{-1}. Napište rovnici vzniklého harmonického vlnění. Jakou okamžitou výchylku má bod vzdálený 75 cm od zdroje v čase 0,01 s? Čas počítáme od začátku kmitání zdroje.

Řešení

$v = 300\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $x = 0{,}75\ \mathrm{m}$, $t = 0{,}01\ \mathrm{s}$; $y = ?$

Harmonický kmitavý pohyb zdroje vlnění lze popsat rovnicí $y = y_m \sin \omega t$. Porovnáním této rovnice s rovnicí $\{y\} = 0{,}04 \sin 600\pi\{t\}$ dostáváme $y_m = 0{,}04\ \mathrm{m}$ a $\omega = 600\pi\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Dosadíme-li do rovnice postupné vlny $y = y_m \sin \omega(t - x/v)$ za veličiny y_m, ω a v, dostaneme hledanou rovnici vlnění ve tvaru

$$\{y\} = 0{,}04 \sin 600\pi\left(\{t\} - \frac{\{x\}}{300}\right).$$

Číselně $$y = 0{,}04 \cdot \sin 600\pi\left(0{,}01 - \frac{0{,}75}{300}\right)\ \mathrm{m} = 0{,}04\ \mathrm{m}.$$

Hledaná okamžitá výchylka bodu je 4 cm.

ZVUKOVÉ VLNĚNÍ

Úloha 174

Zvuk se šíří ve vodě rychlostí $1\,480\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, ve vzduchu rychlostí $340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jak se změní při přechodu zvuku ze vzduchu do vody jeho vlnová délka?

Řešení

$v_1 = 1\,480\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $\lambda_1/\lambda_2 = ?$

Při přechodu zvuku ze vzduchu do vody zůstává frekvence zvuku stejná, poněvadž se však zvuk šíří ve vodě rychleji než ve vzduchu, zvětší se jeho vlnová délka. Pro poměr vlnových délek zvuku ve vodě a ve vzduchu proto dostáváme

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{v_1}{f}}{\frac{v_2}{f}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1\,480}{340} = 4{,}35.$$

Vlnová délka zvuku ve vodě je 4,35krát větší než ve vzduchu.

Úloha 175

Určete rychlost zvuku ve vzduchu při teplotách $-30\ ^\circ\mathrm{C}$, $0\ ^\circ\mathrm{C}$ a $30\ ^\circ\mathrm{C}$.

Řešení

$t_1 = -30\ ^\circ\mathrm{C}$, $t_2 = 0\ ^\circ\mathrm{C}$, $t_3 = 30\ ^\circ\mathrm{C}$; $v_{t1} = ?$, $v_{t2} = ?$, $v_{t3} = ?$

Ve vzduchu o teplotě t má zvuk rychlost

$$v_t \doteq (331{,}8 + 0{,}6\{t\})\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Rychlost zvuku při teplotách $-30\ ^\circ\mathrm{C}$, $0\ ^\circ\mathrm{C}$ a $30\ ^\circ\mathrm{C}$ je proto

$$v_{t1} = (331{,}8 - 0{,}6 \cdot 30)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 313{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$
$$v_{t2} = (331{,}8 + 0{,}6 \cdot 0)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 331{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$
$$v_{t3} = (331{,}8 + 0{,}6 \cdot 30)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 349{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Rychlost zvuku při teplotách $-30\ ^\circ\mathrm{C}$, $0\ ^\circ\mathrm{C}$ a $30\ ^\circ\mathrm{C}$ je $313{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $331{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $349{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Úloha 176

Uslyšíme zvuk, jehož vlnění je popsáno rovnicí

$$\{y\} = 0{,}05 \sin(1\,980\{t\} - 6\{x\})?$$

Vypočtěte také vlnovou délku a rychlost tohoto zvuku.

Řešení

Porovnáním rovnice zvukové vlny

$$\{y\} = 0{,}05 \sin(1\,980\{t\} - 6\{x\}) \tag{a}$$

s obecným tvarem rovnice pro postupnou vlnu

$$y = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = y_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \tag{b}$$

dostaneme

$$\frac{2\pi}{T} = 1\,980\ \mathrm{s^{-1}}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1\,980}{2\pi}\ \mathrm{s^{-1}} \doteq 315\ \mathrm{s^{-1}} = 315\ \mathrm{Hz}.$$

Zvukové vlnění s touto frekvencí leží v pásmu 16 Hz až 16 000 Hz, a je proto slyšitelné. Z porovnání rovnice (a) a (b) dále dostáváme

$$\frac{2\pi}{\lambda} = 6\ \mathrm{m^{-1}}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{6}\ \mathrm{m} \doteq 1{,}05\ \mathrm{m}.$$

Rychlost zvukového vlnění můžeme vypočítat ze vztahu

$$\lambda = \frac{v}{f}, \quad \text{odkud} \quad v = f\lambda = 315 \cdot 1{,}05\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 330\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Dané zvukové vlnění má frekvenci 315 Hz, vlnovou délku 1,05 m a rychlost $330\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Úloha 177

Jaká je vzdálenost mezi sousedními uzly stojaté podélné zvukové vlny ve vzduchu, má-li zvuk ve vzduchu rychlost $342\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a frekvenci 440 Hz?

Řešení

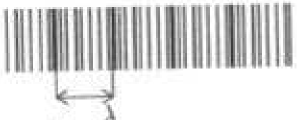
$v = 342\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $f = 440$ Hz; $l = ?$

Podle obr. 31 hledaná vzdálenost l je $l = \frac{1}{2}\lambda$. Poněvadž $\lambda = v/f$, dostáváme

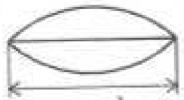
$$l = \frac{\lambda}{2} = \frac{\frac{v}{f}}{2} = \frac{v}{2f}.$$

$$\text{Číselně} \quad l = \frac{342}{2 \cdot 440}\ \mathrm{m} = 0{,}39\ \mathrm{m}.$$

Vzdálenost mezi sousedními uzly daného stojatého vlnění je 0,39 m.



Obr. 31



Obr. 32

Úloha 178

Struna délky 1 m má základní tón o frekvenci 1 000 Hz. Určete rychlost, kterou se může strunou šířit postupné vlnění. Jaká je vlnová délka zvuku, který se šíří vzduchem do okolí struny? Rychlost šíření zvuku ve vzduchu je $340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Řešení

$l = 1$ m, $f = 1\,000$ Hz, $v_z = 340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $v = ?$, $\lambda_z = ?$

Podle obr. 32 je vlnová délka stojaté vlny vzniklé na struně $\lambda = 2l$. Poněvadž $\lambda = v/f$, dostáváme pro rychlost, se kterou se může strunou šířit postupné vlnění,

$$v = \lambda f = 2lf = 2 \cdot 1 \cdot 1\,000\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 2\,000\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Pro vlnovou délku zvuku, který se šíří vzduchem do okolí struny, platí $\lambda_z = v_z/f$, kde v_z je rychlost zvuku ve vzduchu a f jeho frekvence. Po dosazení dostáváme

$$\lambda_z = \frac{340}{1\,000}\ \mathrm{m} = 0{,}34\ \mathrm{m}.$$

Rychlost, kterou se může strunou šířit postupné vlnění, je $2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Vlnová délka zvukového vlnění, které se při tom šíří vzduchem do okolí struny, je 0,34 m.

Poznámka

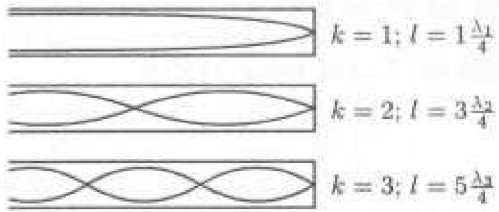
Při řešení této úlohy je třeba rozlišovat mezi rychlostí v, kterou se může strunou šířit postupné vlnění, a rychlostí v_z, kterou se šíří ve vzduchu do okolí struny zvukové vlnění. Dále je třeba rozlišovat mezi vlnovou délkou λ stojatého vlnění na struně a vlnovou délkou λ_z zvukového vlnění ve vzduchu. Frekvence f je pro oba druhy vlnění stejná.

Úloha 179

Trubice o délce 1 m je na jednom konci uzavřena. Určete frekvence, se kterými může kmitat vzduch uvnitř trubice. Rychlost zvuku ve vzduchu je $340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Řešení

$l = 1$ m, $v = 340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $f_k = ?$



Obr. 33

Z obr. 33 je patrné, že uvnitř trubice se vytvoří stojaté vlnění; při tom na otevřeném konci trubice vzniká vždy kmitna, na uzavřeném uzel. Z obr. 33 dále vyplývá, že na délku trubice l připadá vždy lichý násobek čtvrtvln:

$$l = (2k - 1)\frac{\lambda_k}{4}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu $\lambda_k = v/f_k$, dostáváme

$$l = (2k - 1)\frac{v}{4f_k} \quad \text{a odtud} \quad f_k = (2k - 1)\frac{v}{4l}.$$

Po dosazení lze tento vzorec psát ve tvaru

$$f_k = (2k - 1)\frac{340}{4 \cdot 1}\ \mathrm{Hz} = (2k - 1)85\ \mathrm{Hz}.$$

Frekvence, se kterými může kmitat vzduch uvnitř trubice uzavřené na jednom konci, je určena vztahem $f_k = (2k - 1)85$ Hz.

Poznámka
Uvnitř trubice se vzduchem vznikají vždy podélné kmity; na obr. 33 jsou kmity pro větší názornost znázorněny jako příčné.

Úloha 180

Ve vzdálenosti 1 094 m od pozorovatele udeřilo do přímých kolejnic kladivo. Pozorovatel, který přiložil ucho ke kolejnici, uslyšel zvuk šířící se kolejnicí o 3 s dříve než zvuk, který se šířil vzduchem. Určete rychlost zvuku v ocelové kolejnici. Předpokládáme, že rychlost zvuku ve vzduchu je $340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Řešení
$s = 1\,094\ \mathrm{m}$, $\Delta t = 3\ \mathrm{s}$, $v = 340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $u = ?$

Pro šíření zvuku ve vzduchu a v kolejnicích platí

$$s = vt_1, \quad s = ut_2,$$

kde t_1 je doba, po kterou se zvuk šířil ve vzduchu, t_2 doba, po kterou se šířil v kolejnicích, v je rychlost zvuku ve vzduchu a u hledaná rychlost zvuku v kolejnicích. Z obou rovnic vyplývá

$$ut_2 = vt_1 \quad \text{a odtud} \quad u = v\frac{t_1}{t_2}. \qquad \text{(a)}$$

Dobu t_1 můžeme vypočítat z rovnice $t_1 = s/v$. Poněvadž rozdíl mezi dobami šíření zvuku je $\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{s}{v} - t_2$, vyplývá odtud

$$t_2 = \frac{s}{v} - \Delta t.$$

Dosadíme-li za t_1 a t_2 do rovnice (a), dostaneme

$$u = v\frac{\frac{s}{v}}{\frac{s}{v} - \Delta t} = \frac{sv}{s - v\Delta t}.$$

$$\text{Číselně} \quad u = \frac{1\,094 \cdot 340}{1\,094 - 340 \cdot 3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 5\,026\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 5\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

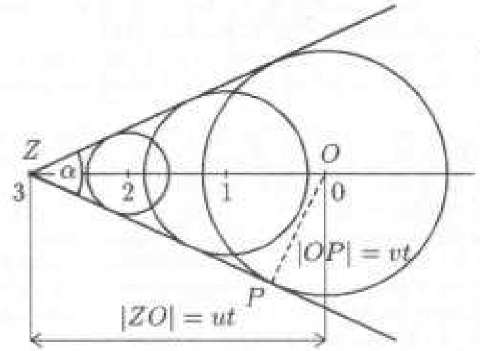
Ocelovou kolejnicí se šíří zvuk rychlostí o velikosti $5\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

Úloha 181

Střela letící rychlostí $2\,448\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ vytváří za sebou zvukovou vlnu kuželového tvaru. Vysvětlete, proč čelo výsledné zvukové vlny má kuželový tvar, a určete úhel α u vrcholu tohoto kužele. Rychlost zvuku ve vzduchu je $340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Řešení
$u = 2\,448\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 680\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v = 340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $\alpha = ?$

Z bodů 0, 1, 2, 3 trajektorie střely se rozšiřují do okolního prostoru elementární kulové vlnoplochy (obr. 34). Podle Huygensova principu čelo výsledné zvukové vlny je vnější obalovou plochou těchto vlnoploch; toto čelo má tvar kužele.



Obr. 34

Za dobu t urazí střela rychlostí u dráhu $|ZO| = ut$, zvuková vlna šířící se z bodu O rychlostí v urazí za stejnou dobu dráhu $|OP| = vt$. Z pravoúhlého trojúhelníku $\triangle ZPO$ pak dostáváme

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{|OP|}{|ZO|} = \frac{vt}{ut} = \frac{v}{u}.$$

$$\text{Číselně} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{680\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} = \frac{1}{2}, \quad \text{a tedy} \quad \frac{\alpha}{2} = 30°,\ \alpha = 60°.$$

Úhel α u vrcholu kužele, který se vytváří za letící střelou, je 60°.

Poznámka
Analogickým způsobem můžeme také vypočítat úhel dvou přímkových vlnoploch, které se na vodní hladině vytvářejí za pohybujícím se člunem.